

# 科技部補助專題研究計畫成果報告 期末報告

## 群環上乘法 Jordan 分解問題再探

計畫類別：個別型計畫  
計畫編號：MOST 106-2115-M-003-012-  
執行期間：106年08月01日至107年07月31日  
執行單位：國立臺灣師範大學數學系（所）

計畫主持人：劉家新

計畫參與人員：博士班研究生-兼任助理：孫維良

中華民國 107 年 10 月 30 日

中文摘要：群環上的乘法Jordan 分解問題是一個被研究超過25 年的老問題。雖然許許多多的情況已經知道解答，但是對於某些特殊類型的群環，乘法Jordan 問題仍然懸而未決。在本計畫中，我們試著研究這些尚未解決的困難問題。

中文關鍵詞：整係數群環，乘法Jordan分解

英文摘要：Multiplicative Jordan decomposition (MJD) problem for group rings has been studied over 25 years. Although lots of cases have been solved, MJD problem for some types of integral group rings remains open. In this project, we try to study these remaining difficult cases.

英文關鍵詞：Integral group ring, multiplicative Jordan decomposition

科技部補助專題研究計畫成果報告  
群環上乘法 Jordan 分解問題再探

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：MOST 106 - 2115 - M - 003 - 012 -

執行期間：106 年 8 月 1 日至 107 年 7 月 31 日

計畫主持人：劉家新

計畫參與人員：研究助理博士生孫維良

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)：精簡報告

執行單位：國立台灣師範大學數學系

中 華 民 國 107 年 10 月 26 日

# 科技部專題研究計畫成果報告

## 群環上乘法 Jordan 分解問題再探

計畫編號：MOST 106 - 2115 - M - 003 - 012

執行期限：106 年 8 月 1 日至 107 年 7 月 31 日

主持人：劉家新 國立臺灣師範大學數學系

計畫參與人員：孫維良 國立台灣師範大學數學研究所博士生

### 一、中英文摘要及關鍵詞

**中文摘要：**本文對於科技部專題研究計畫「群環上乘法 Jordan 分解問題再探」的研究目的、執行情形及所得成果，作一個說明。

**關鍵詞：**整係數群環、乘法 Jordan 分解。

#### Abstract

This article is a report about the progress made for the MOST project “Multiplicative Jordan decomposition problem in group rings revisited”.

**Keywords:** integral group rings, multiplicative Jordan decomposition.

### 二、前言

在本計畫中，我們研究的主題，是群環上頭的乘法 Jordan 分解問題。這問題，自 1990 年代初期被提出來之後，進展緩慢，一直到 2007 年，Hales、Passi 和 Wilson 發表了一篇論文[HPW]，可說是有了重要的進展。接著，個人與 University of Wisconsin-Madison 的 Passman 教授合作，陸續有不少進展，發表了[LP]、[LP2]、[LP3]、[LP4] 以及 [Liu] 等論文，解決了這問題的一大部分。剩下未能解決的情況，可以說是最困難的部分。在本計畫中，我們就是要研究這困難的部分。

### 三、研究目的

我們先談什麼是乘法 Jordan 分解問題。我們令  $G$  代表一個有限群，令  $Q$  代表有理數體，用  $Z$  代表整數環。再令  $Q[G]$  代表有理係數群代數而  $Z[G]$  是整係數的群環。一個古典定理告訴我們，對於任意  $Q[G]$  中的可逆元  $u$ ，我們都有唯一的一個乘法 Jordan 分解  $u = u_s u_u$ ，其中  $u_s$  和  $u_u$  在  $Q[G]$  中， $u_s$  是 semisimple，而  $u_u$  是 unipotent，並且  $u_s u_u = u_u u_s$ 。需要注意的是，如果  $u$  是  $Z[G]$  中的一個可逆元，當然  $u$  在  $Q[G]$  中，所以有乘法 Jordan 分解  $u = u_s u_u$ ，但是這裡的  $u_s$  和  $u_u$  是在  $Q[G]$  中，並不一定在  $Z[G]$  中。如果，對所有  $Z[G]$  中的可逆元  $u$ ，它的  $u_s$  和  $u_u$  都在  $Z[G]$  中，那我們就說  $Z[G]$  具有乘法 Jordan 分解性質(MJD)，為了方便起見，我們也會簡單地說成有限群  $G$  具有 MJD 性質。

在 1990 年初期，Hales、Luthar 和 Passi 等人開始研究（加法的）Jordan 分解問題，請見[HLP]、[HP]。然後，提出了乘法 Jordan 分解問題，問說哪些有限群  $G$  具有 MJD 性質。

加法的 Jordan 分解問題被提出之後，幾年之內就解決了。然而乘法 Jordan 分解問題，卻意外地困難。很多年只有一些零星的結果。一直到了 2007 年刊登在 Journal of Algebra 的一篇文章[HPW]，有了重大的進展。在這篇文章裡，推論出能夠滿足 MJD 性質的群，只有某四類的群。跟隨這篇文章的腳步，個人與 University of Wisconsin-Madison 的 Donald S. Passman 教授合作，發表了一系列的論文[LP]、[LP2]、[Liu]、[LP3]、[LP4] 等，解決了其中一類的

群。而其他幾類的群，也解決了一小部分。剩下有幾類群，我們仍不知道它們是否具有 MJD 性質。我們把這些類的群列在這裡：為了方便，我們用  $C_n$  代表 cyclic group of order  $n$ 。

- (1)  $Q_8 \times C_p$ ，其中  $Q_8$  是 quaternion group of order 8，而  $C_p$  是 cyclic group of order  $p$ ， $p$  是一個質數，並且使得 2 在 modulo  $p$  之下的乘法 order 是偶數。
- (2) 非交換群  $C_p \rtimes C_2^k$  其中  $p$  是一個奇質數，如果  $C_2^k$  由元素  $g$  生成，則  $g^2$  跟  $C_p$  交換。
- (3) 非交換群  $C_7 \rtimes C_3^k$  其中  $C_3^k$  由元素  $g$  生成，而  $g^3$  跟  $C_7$  交換，正整數  $k > 1$ 。

在本計畫中，我們希望研究這幾類群，希望弄清楚在這些群中，哪些具有 MJD 性質。這是非常困難的問題，以致於二十餘年來，無人能解決。

特別地，我們對於第(1)類群更感興趣。我們在過去的研究中累積了些經驗，希望能有所突破。

#### 四、文獻探討

2007 年由 Hales、Passi 和 Wilson 所發表的文章 [HWP] 無疑地是 MJD 問題中重要的里程碑。仔細研讀這篇文章一直都對我的研究有所幫助。

個人過去十餘年來的努力，以及與 Passman 教授的合作，對於 MJD 問題有許多結果，如 [Liu]、[LP]、[LP2]、[LP3]、[LP4]。這些文章，也許蘊含了一些解決問題的辦法，值得我們仔細檢討。

[GS] 對於  $Z[Q_8 \times C_p]$  的可逆元有所研究，值得我們參考。

[HP2] 對於群環上的 Jordan decomposition 做了完整的 Survey，而對於  $C_p \rtimes C_2^k$  的 MJD 問題，給出了部分解答。他們的作法，我們需要多加瞭解。

研究助理孫維良找到 2017 年出版的文章 [WZ]，在這篇文章中，他們解決了  $Z[Q_8 \times C_5]$  的 MJD 問題，自然值得細細研究。

#### 五、執行情形與研究成果

在計畫執行期間，由於個人家人病重需要照顧，乃至於後來過世，對個人投入研究的情況有所影響。幸運的是，研究助理孫維良非常認真，對於 MJD 問題投入相當多的時間研究，也有很好的進展。

我們研究的重點，主要放在  $Z[Q_8 \times C_p]$  的 MJD 問題上面，主要還是因為過去曾經研究此群環多年，雖然未能解決問題，但累積不少經驗。

研究助理孫維良仔細研讀了 [WZ]，學習了他們的方法，也看出了他們的問題所在。粗略地說，[WZ] 的方法之所以能夠成立，是依賴群環  $Z[C_5]$  的可逆元群的特殊長相，再說白一點就是比較簡單，可以把每一個可逆元用比較簡單的方法寫出來，因此比較好檢查。但是這個方法，換到更大的質數，比如  $p=11$ ，看  $Z[C_{11}]$  的可逆元群時，複雜度就高多了，變得非常困難。對於更大的質數  $p$ ，就不用談了，一定做不上去。

正因為看到了這一點，孫維良避開了他們的毛病，而研究  $Z[C_p]$  的可逆元群具有什麼樣的性質，這性質是對於更大的質數  $p$  也對的。利用這些性質，他得以做出比 [WZ] 更好的結果。特別地，對於  $p=11$ ，孫維良證實了  $Z[Q_8 \times C_{11}]$  具有 MJD，這已經是文獻中所沒有的成果。對於  $p=19$ ，事情複雜很多，手算要檢查好幾頁。如果藉助電腦，孫維良得以再往上算某幾個質數  $p$  的情形使得群環  $Z[Q_8 \times C_p]$  具有 MJD 的性質。這用 [WZ] 的辦法，是完全做不到的事。

這些成果，看起來只證實了幾個零星的群環具有 MJD 性質，似乎不是很好的成果。另一方面，要知道 MJD 問題已經出現二十幾年，剩下的這些情況正是過去二十餘年來專家們無法解答的。從這個角度來說，孫維良的進展，其實相當好。而且，孫維良的辦法，是對於大的質數  $p$  也可以用的。我們還在努力當中，希望能夠得找到更多  $Z[C_p]$  上可逆元群的性質，能夠一舉解決  $Z[Q_8 \times C_p]$  的 MJD 問題。

#### 六、參考文獻

[GS] A. Giambruno and S.K. Sehgal, Generators of large subgroups of units of integral group rings of nilpotent groups, *J. Algebra* 174 (1995), no. 1, 150–156.

[HLP] Hales, Luthar and Passi, Partial augmentations and Jordan decomposition in group rings, *Comm. Algebra* 18 (1990), 2327–2341.

[HP] Hales and Passi, Integral group rings with Jordan decomposition, *Arch. Math.* 57 (1991), 21–27.

[HP2] Hales and Passi, Group rings and Jordan decomposition, *Contemp. Math.* 688, AMS, 103–111.

[HPW] Hales, Passi and Wilson, The multiplicative Jordan decomposition in group rings. II, *J. Algebra* 316(2007), no. 1, 109--132.

[Liu] Chia-Hsin Liu, Multiplicative Jordan decomposition in group rings and  $p$ -groups with all noncyclic subgroups normal, *J. Algebra* 371(2012), 300--313.

[LP] Chia-Hsin Liu and D.S. Passman, Multiplicative Jordan decomposition in group rings of 3-groups, *J. Algebra and Its Applications* 8 (2009), no. 4, 509—519.

[LP2] Chia-Hsin Liu and D.S. Passman, Multiplicative Jordan decomposition in group rings of 2,3-groups, *J. Algebra and Its Applications* 9 (2010), no. 3, 483--492.

[LP3] Chia-Hsin Liu and D.S. Passman, Multiplicative Jordan decomposition in group rings of 3-groups, II, *Communications in Algebra* 42 (2014), 2633--2639.

[LP4] Chia-Hsin Liu and D.S. Passman, Multiplicative Jordan decomposition in group rings with a Wedderburn component of degree 3, *Journal of Algebra* 388 (2013), 203--218.

[WZ] Xiu-lan Wang and Qing-xia Zhou, Multiplicative Jordan decomposition in

integral group ring of group  $K8 \times C5$ , *Commun. Math. Res.* 33 (2017), no. 1, 64--72.

## 七、結語

在本計畫中，我們研究了已有二十餘年歷史的群環上的MJD問題。我們所面對的，是剩餘的幾個最困難的情況，在過去二十幾年當中無法解出的。

博士生研究助理孫維良，在本計畫執行期間，做出了相當好的成果。我們期待能夠在不久的將來，解決 $Z[Q_8 \times C_p]$ 的MJD問題。

106年度專題研究計畫成果彙整表

計畫主持人：劉家新			計畫編號：106-2115-M-003-012-				
計畫名稱：群環上乘法 Jordan 分解問題再探							
成果項目			量化	單位	質化 (說明：各成果項目請附佐證資料或細項說明，如期刊名稱、年份、卷期、起訖頁數、證號...等)		
國內	學術性論文	期刊論文		0	篇		
		研討會論文		0			
		專書		0	本		
		專書論文		0	章		
		技術報告		0	篇		
		其他		0	篇		
	智慧財產權及成果	專利權	發明專利	申請中	0	件	
				已獲得	0		
			新型/設計專利		0		
		商標權		0			
		營業秘密		0			
		積體電路電路布局權		0			
		著作權		0			
		品種權		0			
		其他		0			
	技術移轉	件數		0	件		
		收入		0	千元		
	國外	學術性論文	期刊論文		0	篇	
			研討會論文		0		
			專書		0	本	
專書論文			0	章			
技術報告			0	篇			
其他			0	篇			
智慧財產權及成果		專利權	發明專利	申請中	0	件	
				已獲得	0		
			新型/設計專利		0		
		商標權		0			
		營業秘密		0			
		積體電路電路布局權		0			
		著作權		0			
		品種權		0			
		其他		0			

	技術移轉	件數	0	件	
		收入	0	千元	
參與計畫人力	本國籍	大專生	0	人次	本計畫中，博士生研究助理孫維良參與研究，獲致相當不錯的成果。
		碩士生	0		
		博士生	1		
		博士後研究員	0		
		專任助理	0		
	非本國籍	大專生	0		
		碩士生	0		
		博士生	0		
		博士後研究員	0		
		專任助理	0		
其他成果 (無法以量化表達之成果如辦理學術活動、獲得獎項、重要國際合作、研究成果國際影響力及其他協助產業技術發展之具體效益事項等，請以文字敘述填列。)					



## 科技部補助專題研究計畫成果自評表

請就研究內容與原計畫相符程度、達成預期目標情況、研究成果之學術或應用價值（簡要敘述成果所代表之意義、價值、影響或進一步發展之可能性）、是否適合在學術期刊發表或申請專利、主要發現（簡要敘述成果是否具有政策應用參考價值及具影響公共利益之重大發現）或其他有關價值等，作一綜合評估。

1. 請就研究內容與原計畫相符程度、達成預期目標情況作一綜合評估

達成目標

未達成目標（請說明，以100字為限）

實驗失敗

因故實驗中斷

其他原因

說明：

2. 研究成果在學術期刊發表或申請專利等情形（請於其他欄註明專利及技轉之證號、合約、申請及洽談等詳細資訊）

論文： 已發表  未發表之文稿  撰寫中  無

專利： 已獲得  申請中  無

技轉： 已技轉  洽談中  無

其他：（以200字為限）

3. 請依學術成就、技術創新、社會影響等方面，評估研究成果之學術或應用價值（簡要敘述成果所代表之意義、價值、影響或進一步發展之可能性，以500字為限）

本計畫之研究還在持續努力中，一旦有比較完整的結果，我們將寫成論文投往國際數學期刊尋求發表。

4. 主要發現

本研究具有政策應用參考價值： 否  是，建議提供機關

（勾選「是」者，請列舉建議可提供施政參考之業務主管機關）

本研究具影響公共利益之重大發現： 否  是

說明：（以150字為限）